**Universidad Simón Bolívar** Web: j.mp/Mate1USB
**Preparadurías de Matemáticas I (MA1111)** Prepa: AUL 013, Viernes 7-8
**Preparador**: Ricardo J. Fernández Terán ( RicharOrange@hotmail.com )
(Laboratorio de Fotoquímica y Fotobiología, QYP-001A)

# SOLUCIONES EXPLICADAS DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)

## SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2013 Tipo único

**1.** Calcular los siguientes límites:

*a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{3x^2 \tan x}$

*b*) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)$ *d*) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\sin x| - 4x^2}{x^2 \sec x}$

**Solución:**

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1} \xRightarrow{y:=-x} \lim_{y\to\infty}\left[\frac{\sqrt{y^2-4y}}{1-4y} = \frac{\sqrt{\dfrac{y^2}{y^2}-\dfrac{4y}{y^2}}}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{4y}{y}}\right] = \frac{\sqrt{1-0}}{0-4} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right] = \frac{1}{1+1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x-\sin x}{3x^2\tan x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{3x^2\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{3x^2\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{3x^2\sin x} = \frac{1-\cos x}{3x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right.$$

$$\left. = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right] = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

***Variante de Demidovich, Nº 233***
***¡Resuelto en la Prepa No. 4, Ejercicio 9!***

$$d)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-4x^2}{x^2\sec x} \xRightarrow[\substack{\sin x<0 \text{ si } x<0 \text{ luego } |\sin x|=-\sin x \\ \text{a la izquierda de } x=0}]{\text{Definición de valor absoluto}}$$

(Ver nota explicativa al final)

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{-\sin x-4x^2}{x^2\sec x} = -\frac{\cos x\sin x}{x^2}-\frac{4x^2\cos x}{x^2} = -\frac{\cos x\sin x}{x^2}-4\cos x = -\frac{\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}-4\cos x\right] = +\infty$$

**En resumen:** *a*) $= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ *b*) $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ *c*) $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ *d*) $= +\infty$

**2.** Haga un bosquejo de la gráfica de una función $f$ que satisfaga las siguientes condiciones:

**A)** Su dominio es $[0,6]$

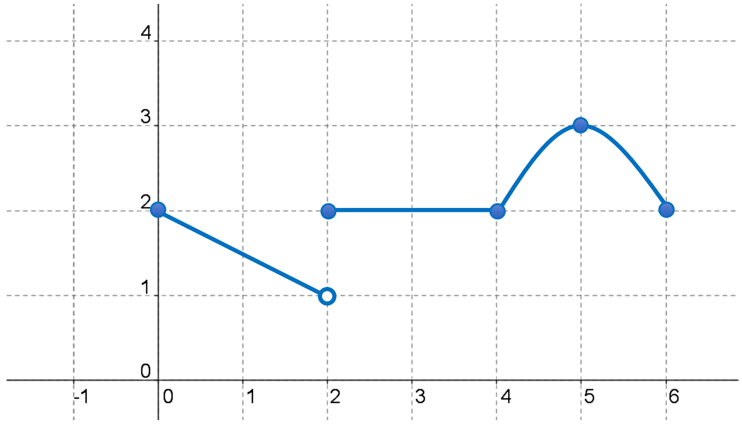
**B)** $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2$

**C)** $f$ es continua, excepto en $x = 2$

**D)** $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 3$

**<u>Solución:</u>**

Una de las posibles respuestas es la función cuya gráfica se muestra a continuación:




La otra conexión posible en el intervalo $[0,2)$ es cualquier función que pase por estos dos puntos (por ej., un polinomio), aunque la más sencilla era una recta. Ocurre de igual forma para el intervalo $[2,4]$. En el intervalo $[4,6]$ se tiene que ambos extremos pueden unirse, por ejemplo, mediante una parábola, ya que para ser continua en este intervalo es necesario que $f(5) = 3$, y existe una parábola que pase por los tres puntos, siendo esta parábola continua por ser una función polinómica.

**3.** Encuentre todos los posibles valores de $a$ y $b$ para que la función $f$ sea discontinua evitable

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{4 - x^2} & \text{si } x < -2 \\ ax^2 - 3 & \text{si } x > -2 \\ b & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

**<u>Solución:</u>**

Una discontinuidad evitable en $x_0$ puede ocurrir cuando los límites laterales existen y son iguales entre sí pero son distintos al valor de $f(x_0)$, o bien cuando $f(x_0)$ no está definida. Así, una discontinuidad evitable se puede remover redefiniendo la función únicamente en este punto $x_0$.

El punto de discontinuidad para $f(x)$ es $x = -2$. Se tienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \left[\frac{x^2 - 2x - 8}{4 - x^2} = \frac{(x+2)(x-4)}{(2+x)(2-x)} = \frac{x-4}{2-x}\right] = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} ax^2 - 3 = 4a - 3$$

Y también se tiene que $f(-2) = b$, con lo que para que $f(x)$ presente una discontinuidad evitable se tiene que los límites laterales deben ser iguales, es decir: $4a - 3 = -3/2 \implies a = 3/8$, y también debe cumplirse que $f(-2) \neq \lim_{x\to -2^\pm} f(x)$ con lo que $b \in \mathbb{R} - \{-3/2\}$.

| | | |
|---|---|---|
| **En resumen:** | $\boldsymbol{a = \frac{3}{8}}$ ; | $\boldsymbol{b \neq -\frac{3}{2}} \implies \left(\textbf{Equivalente a } \boldsymbol{b \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}}\right)$ |

**NOTA (Ejercicio 1.d):**

A pesar de que toda la evidencia intuitiva apunta hacia un resultado de $-\infty$, se debe considerar lo siguiente:

El límite de un producto es igual al producto de los límites, y esta regla debe usarse con cuidado. La indeterminación $\infty \cdot 0$ es un ejemplo claro del problema que puede traer el usar la regla del producto de límites sin escrúpulos.

En el límite en cuestión, es posible separar los términos de la siguiente forma:

$$-\frac{\cos x \sin x}{x^2} - 4\cos x$$

Y a su vez, se puede escribir:

$$-\frac{\cos x \sin x}{x^2} - 4\cos x = -\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} - 4\cos x$$

El término $-4\cos x$ se aproxima a $-4$ cuando $x \to 0^-$.

El término ${}^{\sin x}/_{x}$ se aproxima a 1 cuando $x \to 0^-$ porque tanto $\sin x$ como $x$ son ambos negativos en un entorno a la izquierda de 0.

El término ${}^{\cos x}/_{x}$ se aproxima a $-\infty$ cuando $x \to 0^-$, ya que al evaluar queda una expresión del tipo ${}^{k}/_{0^-}$, donde $k$ es un número distinto de 0 (no hay indeterminación $0/0$ en este límite).

Así, el límite completo tiende a $+\infty$ (por el signo negativo fuera del término completo, considerando que $\infty - 4 = \infty$).

¡Éxito!